

用敲击法识别位移模态和应变模态

南京航空学院 伊立言

摘 要

本文提出了在振动模态试验中用电阻应变片直接识别位移模态和应变模态的理论和办法, 提出应变导纳概念, 建立了应变和振动位移的关系, 推导出在振动系统中用应变变量表示的传递函数公式。用本方法可以识别出系统的模态参数 (包括应变模态、应力模态)。

一般模态试验测响应多用加速度计, 对轻小试件由于附加质量可能会产生较大误差^[1,2], 虽用质量消除技术法能提高一些精度, 但往往不够理想。用电阻丝片不存在这问题, 便于用来找质量轻而承受力大的主应力和主应变, 测传递函数在识别位移振型上和加速度法同样方便。这对减少试验费用, 提高测试精度, 扩大应变片的用途上无疑是很有价值的^[3,4]。

一、应变导纳函数及其实验测定

对于弹性结构如图1, 外力和位移响应的关系用矩阵表示可写为 $\{x\} = [\alpha] \{f\}$ 对柔度矩阵求逆即得刚度矩阵 $[k] = [\alpha]^{-1}$, 而外力和位移的关系^[5] 是

$$\{f\} = [k] \{x\} \quad (1)$$

结构发生位移 x 在结构内部产生线应变和剪应变。因此可定义应变柔度 β_{ij} (或剪应变柔度 r_{ij}) 为在 i 处加单位力而在 j 处沿指定方向引起的线应变(或剪应变)。如图1, 作用在位置 $1, 2, \dots$ 的力 $f_1, f_2, \dots$ 应用迭加原理则各点处线应变用矩阵表示, 可写为 $\{e\} = [\beta] \{f\}$, $[\beta]$ 称为应变柔度矩阵, 把(1)代入得 $\{e\} = [\beta][k] \{x\}$ 并令变换矩阵^[1] $[Q] = [\beta][k]$ ($n \times n$ 的方阵则

$$\{e\} = [Q] \{x\} \quad (2)$$

N 自由度振动系统强迫振动的运动微分方程^{[2],[3]} :

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{p\} \quad (3)$$

如只在 r 点有一激振力 p_r , 可以得到 l 点测量的位移响应 $X_{lr}(\omega)$ ^[2] ,

$$X_{lr}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_i \Phi_r P(\omega)}{k_i (1 - \bar{\omega}_i^2 + j 2 \xi_i \bar{\omega}_i)} \quad (4)$$

亦可写成 $X_{lr}(\omega) = \sum_{i=1}^N X_{lr}^i(\omega)$ 代入(2)式化简可得 $\varepsilon_{lr} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{lr}^i$

$$(\varepsilon_{1r}, \varepsilon_{2r}, \dots, \varepsilon_{nr})^T = \varepsilon_{mr}^1 (\psi_{1r}^1, \psi_{2r}^1, \dots, \psi_{nr}^1)^T \quad (5)$$

式中 ε_{mr}^1 为 r 点激励, 引起给定方向的应变分布最大值。 i 阶模态的应变振型函数为:

$$\{\psi\} = [\{\psi\}_1, \{\psi\}_2, \{\psi\}_3, \dots, \{\psi\}_n] \quad (6)$$

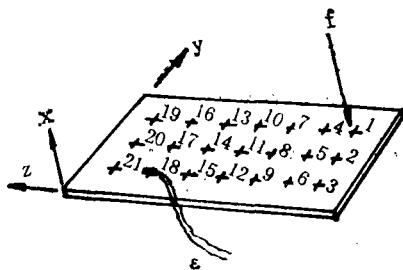


图1 受力的弹性结构

i 阶模态应变值 ε_{1r}^i 为 $\varepsilon_{1r}^i = \varepsilon_{mr}^i \psi_{1r}^i$, 由 (2) 可得 ε_{mr}^i 的表达式

$\varepsilon_{mr}^i = \sum_{j=1}^n Q_{mj} X_{1r}^j$, 再将 (4) 式代入, 并令 $C_{mr}^i = \sum_{j=1}^n Q_{mj} \phi_j^i$, 因而 i 阶模态应变值为

$\varepsilon_{1r}^i = C_{mr}^i \psi_{1r}^i \phi_r^i p_r(\omega) / k_i (1 - \bar{\omega}_i^2 + j2\xi_i \bar{\omega}_i)$, 则总应变值 ε_{1r} 为:

$$\varepsilon_{1r} = \sum_{i=1}^N C_{mr}^i \psi_{1r}^i \phi_r^i P^i(\omega) / K_i (\bar{\omega}_i^2 + j2\xi_i \bar{\omega}_i) \quad (7)$$

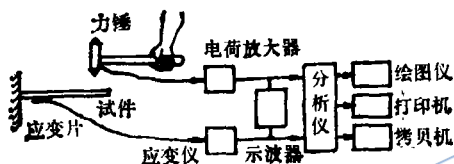
因而应变导纳函数和位移导纳函数^[2] 分别为:

$$H_{1r}^e = \varepsilon_{1r} / P_r = \sum_{i=1}^N (C_{mr}^i \psi_{1r}^i \phi_r^i / K_i) (1 - \bar{\omega}_i^2 + j2\xi_i \bar{\omega}_i)^{-1} \quad (8)$$

$$H_{1r}^D = \sum_{i=1}^N (\phi_{1r}^i \phi_r^i / K_i) (1 - \bar{\omega}_i^2 + j2\xi_i \bar{\omega}_i)^{-1} \quad (9)$$

对照两式可见应变导纳与位移导纳在表达式上相似, 应变导纳不存在互易定理。

测定应变导纳的试验装置如图 2, 用装有力传感器的榔头敲击试件, 输入一持续时间短暂的力脉冲信号 $P(t)$, 应变响应为^[5]



$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot p(t-\tau) d\tau \quad (10)$$

两边进行富氏变换可得: $\varepsilon(\omega) = H(\omega) \cdot p(\omega)$ 。
线性系统中, 响应的富氏变换对激励力的富氏变换比作为频响函数 (即应变导纳):

$$H_{1r}^e(\omega) = \varepsilon_1(\omega) / p_r(\omega) \quad (11)$$

在实测中, 为消除噪音干扰, 可借助功率谱密度求传递函数^[2] ($p^*(\omega)$ 是 $p(\omega)$ 的共轭)

$$H(\omega) = \varepsilon(\omega) p^*(\omega) / p(\omega) P^*(\omega) G_e p(\omega) / G_{pp}(\omega) \quad (12)$$

模态参数的识别可以用共振法、分量法和导纳圆法进行。

二、模态参数的识别

应变导纳按实部虚部展开得^[2]

$$H_{1r}^e = \sum_{i=1}^N \frac{C_{mr}^i \psi_{1r}^i \phi_r^i}{K_i} \left[\frac{1 - \bar{\omega}_i^2}{(1 - \bar{\omega}_i^2)^2 + (2\xi_i \bar{\omega}_i)^2} - j \frac{2\xi_i \bar{\omega}_i}{(1 - \bar{\omega}_i^2)^2 + (2\xi_i \bar{\omega}_i)^2} \right] \quad (13)$$

阻尼比 ξ_i 亦可由 $\xi_i = (\omega_a - \omega_b) / 2\omega_i$ 求得, 式中 ω_a 和 ω_b 为实频特性曲线正负峰值对应的频率。

从虚频特性可以计算位移振型和应变振型的若相邻模态分得开, 这时 i 阶主模态应变导纳虚部峰值 H_{1r}^i 和位移型分量 ϕ_{1r}^i 为

$$H_{1r}^i = -C_{mr}^i \psi_{1r}^i \phi_r^i / 2\xi_i K_i, \quad \phi_r^i = -2\xi_i K_i \cdot H_{1r}^i / C_{mr}^i \psi_{1r}^i \quad (14)$$

对于同一阶来说, 模态阻尼比 ξ_i , 模态刚度 K_i , 系数 C_{mr}^i 是定值, 测量点 l 也固定, 所以 ψ_l^i 并不随敲击点改变。因此位移振型可由各应变导纳函数虚部归一化得到。

$$\{\phi\}_i = [H_{11}^i, H_{12}^i, H_{13}^i \dots H_{1n}^i]^T_{\omega=\omega_i} \quad (15)$$

这里 $H_{11}^i, H_{12}^i, \dots$ 表示在 l 固定点贴一片应变片, 手锤依次在 1, 2, $\dots$ 各点敲击而得

到的 i 阶模态应变导纳函数虚部峰值。如欲测量应变振型 (即 i 阶固有振动的应变分布) 则应在各测点贴应变片, 而在某固定点敲击, 于是应变振型 ψ_i^i :

$$\psi_i^i = -2\xi_i \mathbf{K}_i \mathbf{H}_{1r}^i / C_m^i \phi_i^i \quad (16)$$

ϕ_i^i 为敲击点的位移振型函数值, 在固定敲击点是常值, 因此得

$$\{\psi\}_i = [\mathbf{H}_{1r}^i, \mathbf{H}_{2r}^i, \mathbf{H}_{3r}^i \dots \mathbf{H}_{mr}^i]^T \omega = \omega_i \quad (17)$$

如欲测量应力振型, 主应力和主应力方向, 则各测点应贴三片应变片, 如图 3, 每个点测出三个应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 而后按下式计算主应力的方向和大小^[1]。

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= E[(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/(1 - \mu) + \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + [2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)]^2}/(1 + \mu)]/2 \\ \sigma_{\min} &= E[(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/(1 - \mu) - \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + [2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)]^2}/(1 + \mu)]/2 \\ \theta &= (1/2)\text{tg}^{-1}[2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)] \end{aligned} \quad (18)$$

如已知主应力方向可贴两只应变片, 由下式计算主应力^[7]。

$$\sigma_1 = E(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_3)/(1 - \mu^2), \quad \sigma_2 = E(\varepsilon_3 + \mu\varepsilon_1)/(1 - \mu^2) \quad (19)$$

以上所述为模态参数识别原理, 实际采用导纳圆法或最优化方法其精度要比较高些。

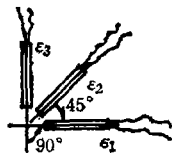


图 3 三片组合应变花

三、试验与分析

试验件有两种, 其中试件一为四边自由的矩形铝板 (图 1), 尺寸 $560 \times 224 \times 5$ 在 1、3、7、9、13、15、19 各点贴了应变片, 每点贴两片方向 Z (沿长度方向) Y (沿宽度方向)。按图 2 接好仪器, 用带力传感器的手锤依次在 1、2、3……各点敲击。图 4 a 和 b 为脉冲信号的力样本和功率谱, 和输出的应变导纳。

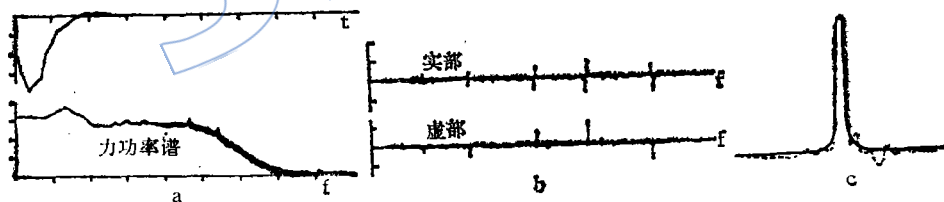


图 4

a. 脉冲力样本和功率谱, b. 应变导纳, c. 虚频特性的优化计算

参数识别使用了非线性最优化识别法^[1], 应变导纳虚频特性计算结果见图 4c

试验的同时还用非接触激振器, 多点激振法作了相应的振动试验, 并用有限元法 (采用矩形单元) 计算了各阶固有频率和位移振型。

表 1 列出了平板试件 (图 1) 用锤击法、多点激振法试验和有限元计算结果的比较。图 5 为电阻应变片法识别的位移振型给出几种简单示例。图 6 为识别的前四阶应变振型。

试件 2 为一实际叶轮的整体式结构见图 7。敲击点共 34 点, 用 FFT 分析仪作数据处理, 其结果与有限元计算和正弦稳态法试验一致性比较好。

表 1 不同模式下各种方法确定的固有频率(Hz)的比较

No	正弦稳态法	锤击法	有限元法	误差	$\xi \times 10^3$
1	85	82.25	81.71	-3.24	5.01
2	125	122.81	125.42	-1.75	2.6
3	227	226.99	228.18	0.00	1.70
4	262	262.22	276.32	0.08	4.76
5	445	443.79	441.05	-0.27	5.83
6	538	535.64	549.74	-0.44	2.5
7	580	580.57	591.37	0.09	2.84
8	736	722.09	742.81	-1.89	4.11
9	755	754.01	761.23	-0.13	1.71
10	936	926.19	943.07	-0.52	3.02
11	966	969.18	979.85	0.33	2.92

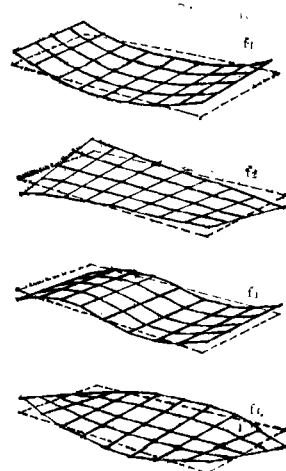


图 5 前四阶位移振型

可以看出用应变片测响应得到的应变导纳作参数识别有很多优点,它对试件没有附加刚度和质量影响,应变片尺寸小,价格低,还可多点测量,而且直接给出应变场函数,这种方法特别适用于轻小零件,当然对叶轮组合结构在叶片数较多,而且片与片之间比较紧密时,敲击也有一定困难,特别是松装叶片进行整体式模态试验可能会遇到一些问题,这要针对具体情况妥善解决,否则会影响试验的质量。

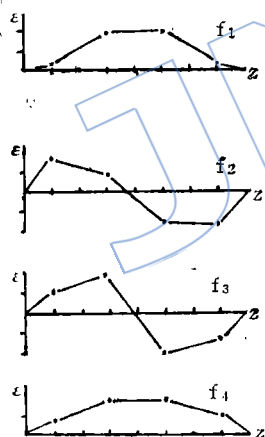


图 6 前四阶应变振型

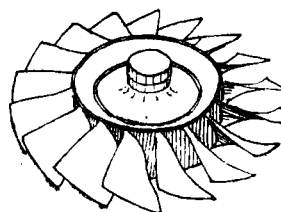


图 7 整体叶轮组件

参 考 文 献

- 〔1〕 孔凡让, 80届一般力学硕士研究生毕业论文, 南京航空学院, 1983年。
- 〔2〕 周全友, 伊立言, “用锤击法测定涡轮机叶片轮盘组合体模型的振动特性”, 南航学报, 第一期, 1983年。
- 〔3〕 Nied, H.A. “Modal Analysis of Gas Turbine Bucket Using a Digital Test System”, Trans of ASME Journal of Eng. for Power, Vol. 102, No2, 1980.
- 〔4〕 Bolleter, U., Eberl, J., Buenlmann, E. “Modal Analysis of Compressor Blades by Means of Impulse Excitation”, AGARD-CP-248, 1979.
- 〔5〕 汤姆孙, “振动理论及其应用”, 煤炭工业出版社, 1980年。

STUDY ON DIRECT IDENTIFICATION OF DISPLACEMENT MODE AND STRAIN MODE BY IMPULSE EXCITATION

Yi Liyan

(*Nanjing Aeronautical Institute*)

Abstract

The theory and method of direct identification of displacement and strain modes for vibration modal test with strain gauges are described. The concept of strain mobility, strain displacement relationships and derivation of formulae of transfer functions in terms of strains are considered. The system modal parameters, including the strain mode and stress mode etc., can be identified by the present method. This is a new development for modal tests of impulse excitation.

ANALYSIS OF DAMAGE TOLERANCE FOR TURBINE DISKS

Nie Jingxu et al

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

Abstract

This paper deals with the analysis and design of the damage tolerance for turbine disks. A practical design method is worked out and verified through analysing the damage tolerance of an existing engine. A "twice evaluation algorithm" for evaluating J-integral is provided, in which J is estimated in the light of the linear elastic fracture mechanics, and then a plastic correction with iterative procedure is made to obtain J. On the basis of breakdown tests and elaborate theoretical calculations, a criterion and a solution algorithm for determining the critical crack length are suggested. A method calculating residual life or turbine disk initiating cracks is provided, which is proved practical. The numerical results obtained by this method are in good agreement with the statistics of crack propagation collected from the actual turbine disks.

THERMOELASTOPLASTIC CREEP ANALYSIS FOR TURBINE DISK

Mu Xiaying and Liu Xirui

(*Xian Jiaotong University*)

Abstract

This paper deals with the strength analysis for turbine disk of aeroengine. A finite element analysis program of thermoelastoplastic creep is formulated,